РАЗДЕЛ 1. ВОПРОСЫ МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

СОДЕРДАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В КОНТЕКСТЕ РЕАЛИЗАЦИИ КОНЦЕПЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ И ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО СТАНДАРТА ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

(основные положения пленарного доклада на форуме учителей математики)

Липатникова И.Г.
ФГБОУ ВПО «Уральский государственный педагогический университет», г. Екатеринбург

Одним из важнейших направлений государственной политики в области образования является развитие математического образования. Его фундаментальность и значимость как составляющей мирового научно-технического прогресса обоснована в концепции математического образования в Российской Федерации.

Изучение основ математики в современных условиях становится все более приоритетным направлением для общеобразовательной подготовки молодого поколения. В настоящее время внимание к школьному математическому образованию усиливается во многих странах мира. Анализ мирового опыта позволяет выделить три важные тенденции развития математического образования: понимание необходимости математического образования для всех школьников и широкая постановка соответствующих исследований; стремление к включению общеобразовательных курсов математики в учебные планы на всех ступенях обучения; глубокая дифференциация математической подготовки на старших ступенях школы.

Идея значимости математического образования подчеркивается в докладе Джона Глена от Национальной комиссии по математике и естественным наукам для 21 века президенту Соединенных штатов под названием «Пока не поздно» (Before It Is Too Late, John Glenn's National Commission on Mathematics and Science Teaching for the 21st Century): «Комиссия убеждена, что на заре нового столетия и тысячелетия будущее благосостояние нашего государства зависит не только от того, насколько мы хорошо обучаем детей в целом, но и от того, насколько мы хорошо обучаем естественным, фундаментальным наукам и математике**.** Эти науки дают нам продукты, уровень жизни, экономическую и военную безопасность, которые будут поддерживать нас как дома, так и во всем мире» [7].

Продолжение представленного выше прогноза о значимости математического образования отражено в концепции математического образования РФ, где отмечается, что без высокого уровня математического образования невозможны выполнение поставленной задачи по созданию инновационной экономики, реализации долгосрочных целей и задач социальноэкономического развития Российской федерации, модернизации 25млн. высоко производительных рабочих мест к 2020 году» [3] .

Одной из важнейших проблем, заявленных в концепции математического образования, является проблема содержания математического образования, которая апеллирует к проблеме понимания многогранности и многоаспектности математического образования. Это проблема, которая, в современной школе стоит актуально. Как замечено в концепции математического образования: «Проблема формирования содержания не исчерпывается только стандартами, программами и заданиями итоговой аттестации» [3]. На наш взгяд, учитель не имеет права обучать учащихся содержанию математического образования, не имея представления, что за этим стоит.

Федеральный государственный образовательный стандарт общего образования позволил раскрыть цели математического образования с позиции личностных, метапредметных и предметных универсальных учебных действий, тем самым позволил расширить представления о возможностях математики как науки и подходы к раскрытию ее многоаспектности.

I подход – формирование представлений о математике как части общечеловеческой культуры, о значимости математики в развитии цивилизации и современного общества;

- развитие представлений о математике как форме описания и методе познания действительности, создание условий для приобретения первоначального опыта математического моделирования [9].

Содержание первого подхода предопределено в цитате А. Пуанкаре о понимании значимости чистыми математиками окружающего мира: «Чистый математик, который забыл бы о существовании внешнего мира, был бы подобен живописцу, умеющему гармонически сочетать цвета и формы, но лишённому натуры, модели – его творческая сила быстро бы иссякла» [8].

Понимание учителем целостностности математического знания предполагает обогащение жизненного опыта учащихся фактами из истории математики, жизни и твочества великих математиков. При этом раскрывается потенциал математики как науки и реализуются следующие цели ее обучения:

- формирование научного мировоззрения учащихся;
- повышение общей культуры и расширение кругозора учащихся;
- углубление понимания учащимися изучаемого раздела;
- установление внутрипредметных и межпредметных связей;
- раскрытие роли математики в современном обществе;
- развитие у учащихся чувства прекрасного.

При этом указанные целевые векторы определяют социально-психологическую необходимость личностной ориентация обучения, которая обеспечивает каждому учащемуся возможность выбора индивидуальной траектории обучения, определяемого личным целевым вектором.

Проиллюстрируем сказанное на примере. Учащимся 11-х классов будет интересно сравнить геометрический подход к решению задач на поиск экстремальных точек и эффективность использования метода П. Ферма.

Несомненно, что открытие метода Ферма упрощает поиск экстремальных точек. Однако геометрический подход не обладает универсальностью, к тому же геометрическое решение для некоторых задач чрезвычайно громоздко [10]. Так, И. Кеплер в «Новой стереометрии винных бочек» доказывает утверждение:

Из всех цилиндров, имеющих одну и туже диагональ, самым вместительным будет тот, в котором отношение диаметра основания к высоте равно $\sqrt{2}$**.**

Геометрическое доказательство занимает несколько страниц. Посмотрим, насколько оно велико, если использовать производную.

Пусть l – диагональ цилиндра, x – его высота (рис.1), $0 \le x \le l$.

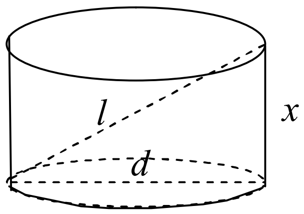

Рис.1

Тогда диаметр основания цилиндра $d = \sqrt{l^2 - x^2}$, а его объем $V(x) = \frac{\pi x}{4}\left(l^2 - x^2\right)$.

Производная $V'(x) = \frac{\pi}{4}\left(l^2 - 3x^2\right)$ обращается в нуль в точках $x = \pm\frac{l}{\sqrt{3}}$. Условию задачи удовлетворяет $x_1 = \frac{l}{\sqrt{3}}$.

Поскольку $V(0) = V(l) = 0$ – минимальное значение объема, то в точке x_1 объем максимален. В этом случае $d_1 = l\sqrt{\frac{2}{3}}$ и $d_1 : x_1 = \sqrt{2}$.

Доказательство закончено.

Новый метод нахождения экстремума помог П. Ферма сформулировать общий принцип геометрической оптики, называемый сейчас ***принципом Ферма.***

II подход – математика как средство интеллектуального развития человека для его полноценного функционирования в обществе

Социальная значимость образования с помощью математики заключается в повышении средствами математики уровня интеллектуального развития человека для его полноценного функционирования в обществе, обеспечении функциональной грамотности каждого члена общества, что является необходимым условием повышения интеллектуального уровня общества в целом. В контексте образования с помощью математики образовательную область «Математика», по мнению Г.В. Дорофеева, следует рассматривать «как *предмет общего образования*, ведущей целью которого является интеллектуальное воспитание, развитие мышления подрастающего человека, необходимое для свободной и безболезненной адаптации его к условиям жизни в современном обществе» [11].

Неслучайно в своем выступлении на заседании Государственного совета Российской Федерации 29 августа 2001 В.В. Путин отметил: «нельзя относиться к образованию только как к накоплению знаний. В современных условиях это – прежде всего развитие аналитических способностей и критического мышления у учеников. Это – умение учиться. Умение самому воспринимать знания, успевать за переменами» [4].

Развитие личности учащегося, его интеллекта, чувств, воли осуществляется лишь в активной деятельности. Человеческая психика не только проявляется, но и формируется в деятельности, и вне деятельности она развиваться не может [6]. В форме нейтрально-пассивного восприятия нельзя сформировать ни прочных знаний, ни глубоких убеждений, ни гибких умений.

Способность учащихся к творческой (а значит, и к исследовательской) деятельности эффективно развивается в процессе их целесообразно организованной деятельности под руководством учителя.

При этом важно помнить, что развивает не само знание, а специальное его конструирование, моделирующее содержание научной области, методы ее познания [12].

В связи с этим, системно-деятельностный подход, определенный в качестве методологической основы в федеральном государственном образовательном стандарте общего образования, предопределяет такую модель обучения математике, которая «имитирует» творческую математическую деятельность [2], что позволяет осуществлять интеллектуальное развитие учащихся. Очевидно, что творческая деятельность ученика не может быть полностью адекватна деятельности инженера или математика. Речь идет о субъективном исследовании ученика, когда он становится соучастником получения субъективного нового для него знания. И.Я. Лернер [5] творчеством ученика называет вид его деятельности, направленный на создание качественно новых ценностей, имеющих общественное значение, важных для формирования личности как общественного субъекта.

Приведем пример работы учащихся с теоремой, в процессе которой учащиеся овладевают навыками наблюдения, экспериментирования, сопоставления и обобщения фактов, формулирования выводов.

Учащимся предлагается теорема, в содержании которой необходимо выявить формулировки двух теорем.

Теорема: CM – медиана треугольника *ABC*. Для того, чтобы ΔABC был прямоугольным, необходимо и достаточно, чтобы $CM = \frac{1}{2}AB$.

В теореме сформулированы две теоремы:

1) если ΔABC прямоугольный $(\angle C = 90°)$ и CM – медиана, то $CM = \frac{1}{2}AB$.

2) если *CM* – медиана треугольника *ABC* и $CM = \frac{1}{2}AB$, то ΔABC прямоугольный $(\angle C = 90°)$.

Предлагаются вопросы творческого характера:

1) Какая из этих двух теорем является достаточным признаком прямоугольного треугольника?

2) Какая из этих теорем является необходимым свойством прямоугольного треугольника?

3) Какая из этих теорем является достаточным признаком того, что медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена?

4) Какая из этих теорем является необходимым свойством того, что медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена?

Развивающая функция творческой математической деятельности учащихся заключается в том, что в процессе ее выполнения происходит усвоение методов и стиля математического мышления.

Проиллюстрируем сказанное конкретным примером.

После изучения признака подобия треугольников по двум углам целесообразно формулировать задачи на построение, которые можно решить, зная этот признак подобия.

Пример задачи: 1) дан ΔABC, $M \in BC$. Через точку М провести прямую так, чтобы получить треугольник, подобный данному.

Решение. Пусть в новом треугольнике остается угол В. Обозначим новый треугольник ΔBMN ($N \in BA, \angle BMN = \angle C$, тогда $MN \parallel AC$ (рис. 2) или $\angle BMN = \angle A$, надо построить $\angle BNM = \angle C$ (рис. 3)

Точку М можно взять на прямой ВС вне отрезка ВС (рис. 4, 5).

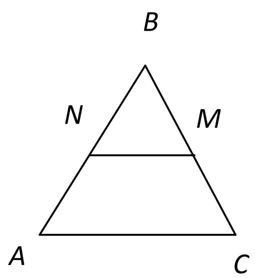

Рис. 2

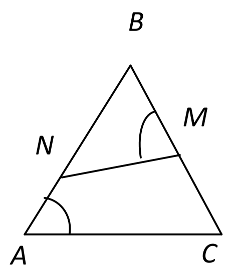

Рис. 3

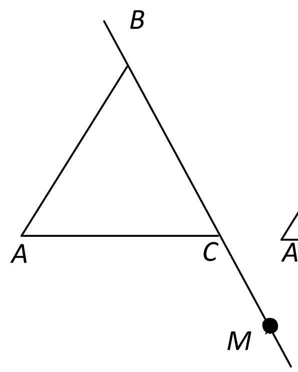

Рис. 4

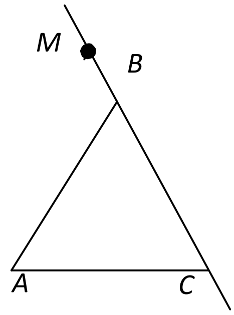

Рис. 5

III подход – прикладная направленность математики.

Прикладная направленность обучения математике предполагает ориентацию его содержания и методов на тесную связь с жизнью, основами других наук, на подготовку школьников к использованию математических знаний в предстоящей профессиональной деятельности. В настоящее время под ***прикладной направленностью*** принято понимать требование к обучению математике, при котором не только будут освоены учащимися некоторые факты математической теории, но и показано, как эта теория может быть применена в той или иной предметной области, внешней по отношению к данной теории.

Кроме того, в качестве средств прикладной направленности школьного курса математики могут быть рассмотрены задачи, направленные на формирования такого уровня математической культуры школьника, который характеризуется:

- осознанным пониманием происхождения математических объектов;
- представлением о возможности применения математики к решению практических задач, возникающих в разнообразных областях знаний;
- знанием о приложениях математики к различным сферам деятельности человека.

Формулы, синуса суммы и синуса разности, косинус суммы и разности, формулы, позволяющие переходить от произведения тригонометрических функций к их сумме, применяются в радиотехнике [1]. Пусть нам надо передать по радио голос диктора частотой, скажем, 300 Гц. На таких низких частотах вести радиопередачу невозможно: частоты радиоволн, применяемых для радиовещания, могут измеряться миллионами Гц. Волны таких частот используют так. Пока диктор молчит, в эфир идут только радиоволны высокой частоты w (несущая частота – график на рис. 6).

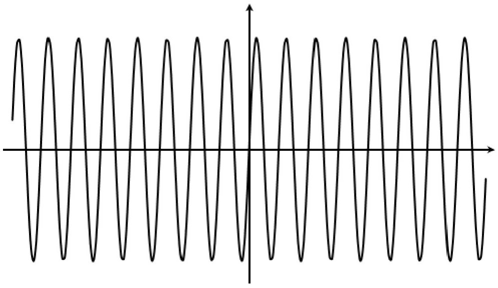

Рис 6. Диктор молчит

Никакой информации с этим сигналом не передается. Пусть теперь диктор начал издавать звуки с частотой η (η много меньше, чем ω); тогда в эфире идет сигнал $\upsilon = (A \sin \eta t) \sin \omega t$. Примерный график его представлен на рис. 7.

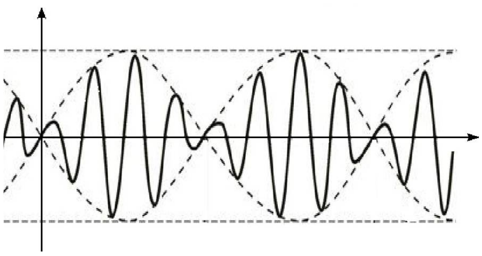

Рис. 7. Диктор говорит

Можно сказать, что амплитуда колебаний высокой частоты ω сама претерпевает колебания с низкой частотой η. Как говорят, высокочастотный сигнал модулируется низкочастотным (все сказанное – лишь грубая схема того, что на самом деле происходит в приемнике).

Преобразуем выражение для модулированного сигнала:

$$u = A \sin \eta t \sin \omega t = \frac{A}{2} \cos(\omega - \eta) t - \frac{A}{2} \cos(\omega + \eta) t.$$

Как видим, наш модулированный сигнал – не что иное, как сумма сигналов с частотами $\omega+\eta$ и $\omega-\eta$. Таким образом, когда говорят, что радиостанция ведет передачу на частоте, скажем, $\omega = 10\text{МГц}$, то надо помнить, что фактически в эфир идут не только радиоволны частоты ω, но и волны всех частот из интервала $[\omega-\eta; \omega+\eta]$, где η – максимальная частота полезного сигнала, передаваемого радиостанцией. Значит, несущие частоты различных радиостанций не могут быть слишком близки друг к другу: если отрезки $[\omega-\eta; \omega+\eta]$ будут перекрываться, то радиостанции будут мешать друг другу.

IV подход – математика – это язык науки и жизни.

В 2012 году в Бостоне прошла премьера документального фильма «Чувственная математика». Герои этого фильма представляют математику как язык, на котором мир разговаривает с нами. Математика может быть чувственной. У нее есть вкус, она звучит и имеет цвет. Ее можно ощутить и она может трогать. Ею можно описать мир. При этом описать не значит упростить, свести к схемам и формулам, а представить мир через призму математики, описать его проблемы и вероятность их решения математическими задачами, перевести мир с одного языка культуры на другой – язык науки. Фильм «Чувственная математика» состоит из нескольких эпизодов. Режиссер выделяет по одному эпизоду на каждое чувство: вкус, зрение, обоняние, осязание, слух и чувство баланса, при этом, в фокусе внимания прежде всего личность. «Чувственная математика» — это прежде всего людские истории, портреты с натуры, очень метко выхваченные из жизненного потока. Герои фильма — выдающиеся математики и наши современники: Максим Концевич, Жан Мишель Бисмут, Цедрик Виллани, Анатолий Фоменко, Ади Ранган и Гюнтер Циглер.

Структурирование содержание математического образования с позиции представленных выше подходов позволит повысить интерес к математике, освоить фундаментальное математическое содержание, сформировать интеллектуальное мышления, и, соответственно, повысить качество математического образования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд И.М. Тригонометрия / И.М Гельфанд, С.М. Львовский, А.Л. Тоом. – М. : МЦНМО, 2003. 196 с.
2. Иванова Т.А. Теория и технология обучения математике в средней школе: учеб. пособие для студентов математических специальностей педагогических вузов / Т.А. Иванова, Е.Н. Перевощикова, Л.И. Кузнецова, Т.П. Грирорьева; под ред. Т.А. Ивановой. 2-е изд., испр. и доп. – Н. Новгород: НПГУ, 2009. 355 с.
3. Концепция развития математического образования в Российской Федерации:24.12.2013. URL: http://минобрнауки.рф/документы/3650/файл/2730/Концепция%20развития%20математического%20образования%20в%20РФ.pdf

4. Кудрявцев Л. Модернизация средней школы и математическое образование / Л. Кудрявцев – URL: http://mat.1september.ru/2002/38/no38_1.htm.
5. Лернер И.Я. Учебный предмет, тема, урок / И.Я. Лернер – М. : Знание. – 1988. 88 с.
6. Липатникова И.Г. Проблема формирования умения учиться / И.Г. Липатникова // Теоретические и прикладные вопросы образования и науки. Сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции. – Тамбов. – 2014. 3 с.
7. Не нужно повторять ошибки США // Газета.ru: URL: http://www.gazeta.ru/lifestyle/education/2013/01/14_e_4923217.shtml.
8. Пуанкаре А. О науке / А. Пуанкаре. – М. : Наука. – 1990. 736 с.
9. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования: 17.12.2010. URL: http://www.edu.ru/db-mon/mo/Data/d_10/prm1897-1.pdf.
10. Шибасов Л.П. За страницами учебника математики: Математический анализ. Теория вероятностей: пособие для учащихся 10-11кл. / Л.П. Шибасов, З.Ф. Шибасова. – М. : Просвещение. – 2008. 223 с.
11. «Школа 2000...». Математика для каждого: концепция, программы, опыт работы / под ред Г.В. Дорофеева. – М. : УМЦ "Школа 2000...". – 2000. 199 с.
12. Якиманская И.С. Личностно ориентированное обучение в современной школе / И.С. Якиманская – М. : Сентябрь. – 1996.